EXTRAITS DE LETTRES

DE

G.-H. HALPHEN A J.-J. SYLVESTER

NOTE DES ÉDITEURS

Ces extraits se trouvent cités dans les publications de Sylvester sur sa théorie des réciprocants. Ils se rapportent à la théorie des invariants différentiels. Les lettres dont ils avaient été tirés ont été écrites en 1885 *et* 1886.

I

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES (¹)

En premier lieu, c'est une chose nouvelle pour moi que l'équation différentielle des coniques se trouve dans Boole, dont je ne connais pas l'ouvrage (²). Je vais, bien entendu, le consulter avec curiosité,

(¹) Cet extrait est cité dans l'*Inaugural lecture* que Sylvester fit à Oxford, le 12 décembre 1885, lorsqu'il fut nommé à la chaire Savilienne de Géométrie de l'Université d'Oxford. Cette leçon inaugurale (*On the method of Reciprocants as containing an exhaustive theory of the singularities of curves*) a été publiée dans le journal *Nature*, t. XXXIII, 1886, p. 222-231. Dans les *Œuvres de Sylvester* (*The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester*, Cambridge, University Press), l'extrait en question se trouve à la page 283 du tome IV. Un passage ultérieur (*Œuvres de Sylvester*, t. IV, p. 290) indique que la lettre d'Halphen était datée du 25 novembre 1885. (*Note des éditeurs.*)

(²) Boole, *Differential Equations*, 1859. L'équation différentielle des coniques :

$$9(y'')^2 y^{\text{v}} - 45 y'' y''' y^{\text{iv}} + 40 (y''')^3 = 0,$$

y est donnée pages 19-20, et attribuée à Monge. Sylvester s'était adressé à Halphen

Ce fait a échappé à tout le monde ici, et l'on a cru généralement que j'avais le premier donné cette équation. *Nil sub sole novi !* Il m'est naturellement impossible de vous dire où la même équation est enfouie parmi les œuvres de Monge. Pour moi, c'est dans le *Journal de Mathématiques* (1876), p. 375 ([1]), que j'ai eu, je crois, la première occasion de développer cette équation sous la forme même que vous citez; et c'est quand je l'ai employée, l'année suivante, pour le problème *sur les lois de Kepler* (*Comptes rendus de l'Académie*, 1877, t. LXXIV, p. 939) ([2]) que M. Bertrand l'a remarquée comme neuve. Ce qui vous intéresse plus, c'est de connaître la forme simplifiée sous laquelle j'ai donné plus tard cette équation dans le *Bulletin de la Société mathématique* ([3]). C'est sous cette dernière forme que M. Jordan la donne dans son Cours de l'École Polytechnique (t. I, p. 53).

II

SUR L'EXISTENCE DES INVARIANTS ([4])

Dans des théories diverses, on a rencontré des invariants sans qu'on ait pénétré la cause générale de leur existence. C'est cette lacune qu'il s'agit ici de faire disparaître.

---

pour savoir en quel endroit des œuvres de Monge se trouvait effectivement cette équation. Mais ni Halphen ni aucun autre mathématicien ne put le renseigner à ce moment. Sylvester a donné plus tard la référence, à savoir : MONGE, *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II, 1809-1813, p. 51-54; et *Bulletin de la Société philomathique*, 1810, p. 87-88 (SYLVESTER, *Lectures on the Theory of Reciprocants*, lecture XIII, *American Journal of Mathematics*, t. IX, 1887, p. 17-18; *Œuvres de Sylvester*, t. IV, p. 380). (*Note des éditeurs*).

([1]) [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 511. Voir aussi *Ibid.*, p. 395].

([2]) [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 89].

([3]) [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 290].

([4]) Cet extrait se trouve dans la vingt et unième des leçons de Sylvester sur la théorie des réciprocants, professées à Oxford en 1886 (*American Journal of Mathematics*, t. IX, 1887, p. 137 : *Œuvres de Sylvester*, t. IV, p. 421). La lettre d'Halphen, dont la date exacte n'est pas donnée, a dû être écrite dans les premiers mois de 1886. Le fragment en question est évidemment une rédaction des essais contenus dans le dossier n° 14 des papiers laissés par Halphen (voir *Œuvres d'Halphen*, t. IV, p. 470, avant-dernier alinéa). Il a été l'objet d'une critique de Sophus Lie (*Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-physische Classe*, 1er août 1887).

1. Soient A, B, ..., L des quantités auxquelles on puisse attribuer des valeurs *ad libitum*.

Une *substitution* consiste à remplacer ces quantités (A, B, ..., L) par d'autres (a, b, ..., l).

Les substitutions que l'on doit considérer ici sont définies par des relations algébriques, de forme supposée donnée, mais contenant des *paramètres* arbitraires p, q, ...

$$\text{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = f\ (A, B, \ldots, L; p, q, \ldots), \\ b = f_1(A, B, \ldots, L; p, q, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Soit maintenant une seconde substitution, de même espèce, mais avec d'autres paramètres ϖ, χ, ..., et donnant lieu à (α, β, ..., λ), en sorte qu'on ait

$$\text{(1 bis)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = f\ (A, B, \ldots, L; \varpi, \chi, \ldots), \\ \beta = f_1(A, B, \ldots, L; \varpi, \chi, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

2. Définition. — Les substitutions dont il s'agit forment un groupe si, quels que soient les paramètres p, q, ..., ϖ, χ, ..., ainsi que A, B, ..., L, il existe des quantités P, Q, ... vérifiant les égalités semblables

$$\text{(1 ter)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = f\ (a, b, \ldots, l; P, Q, \ldots), \\ \beta = f_1(a, b, \ldots, l; P, Q, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les invariants sont l'apanage exclusif des substitutions formant groupe. On va le montrer. Mais auparavant, pour éviter toute confusion, on doit faire une remarque sur la définition.

3. Dans les diverses théories où l'on a rencontré des invariants, les substitutions forment groupe, en effet, suivant cette définition; mais il s'y rencontre encore une circonstance particulière de plus, c'est que les paramètres P, Q, ... de la substitution composée (1 *ter*) dépendent uniquement des paramètres p, q, ..., ϖ, χ, ... des substitutions composantes, (1) et (1 *bis*). Cette propriété *n'est pas nécessaire* à l'existence des invariants, et nous ne la supposerons pas ici. Il sera donc entendu que P, Q, ... peuvent dépendre, non seulement de p, q, ..., ϖ, χ, ..., mais aussi de A, B, ..., L.

Exemple I :

$$a = \mathrm{A}p^2, \quad b = \mathrm{A}pq + \mathrm{B}p, \quad c = \mathrm{A}q^2 + 2\mathrm{B}q + \mathrm{C},$$
$$\alpha = \mathrm{A}\varpi^2, \quad \beta = \mathrm{A}\varpi\chi + \mathrm{B}\varpi, \quad \gamma = \mathrm{A}\chi^2 + 2\mathrm{B}\chi + \mathrm{C},$$
$$\alpha = a\mathrm{P}^2, \quad \beta = a\mathrm{PQ} + b\mathrm{P}, \quad \gamma = a\mathrm{Q}^2 + 2b\mathrm{Q} + c;$$
$$\mathrm{P} = \frac{\varpi}{p}, \quad \mathrm{Q} = \frac{\chi - q}{p};$$

P et Q ne dépendent pas de A, B, C.

Exemple II :

$$a = \mathrm{A}^3p^2, \quad b = \mathrm{A}^2pq + \mathrm{AB}p, \quad c = \mathrm{A}q^2 + 2\mathrm{B}q + \mathrm{C};$$
$$\alpha = \mathrm{A}^3\varpi^2, \quad \beta = \mathrm{A}^3\varpi\chi + \mathrm{AB}\varpi, \quad \gamma = \mathrm{A}\chi^2 + 2\mathrm{B}\chi + \mathrm{C},$$
$$\alpha = a^3\mathrm{P}^2, \quad \beta = a^3\mathrm{PQ} + ab\mathrm{P}, \quad \gamma = a\mathrm{Q}^2 + 2b\mathrm{Q} + c;$$
$$\mathrm{P} = \frac{\varpi}{\mathrm{A}^3p^3}, \quad \mathrm{Q} = \frac{\chi - q}{\mathrm{A}p};$$

P et Q dépendent de A.

Dans ces deux exemples, il y a un invariant absolu $\frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}}{\mathrm{A}}$.

4. Dans la substitution (1) nous supposerons que le nombre des paramètres soit inférieur au nombre des quantités A, B, ... L.

Soient ainsi m le nombre des paramètres $p, q, \ldots$; n le nombre des quantités A, B, ..., L; on suppose $m < n$.

Cela étant, on peut éliminer les paramètres entre les équations (1), et il reste $(n - m)$ équations

$$(2) \quad \begin{cases} \mathrm{F}(a, b, \ldots, l; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0, \\ \mathrm{F}_1(a, b, \ldots, l; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Théorème. — *Si les substitutions considérées forment* groupe, *les $(n - m)$ équations (2) peuvent être mises sous la forme*

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi(a, b, \ldots, l) = \Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}), \\ \Phi_1(a, b, \ldots, l) = \Phi_1(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En d'autres termes, *il y a $(n - m)$ invariants absolus.*

Réciproquement, s'il y a $(n - m)$ invariants absolus (distincts), *les substitutions forment groupe.*

5. Démonstration. — Prouvons d'abord la seconde partie, ou réciproque. Voici l'hypothèse : des équations (1), par élimination des p, q, ..., résultent les équations (3).

Par conséquent, A, B, ..., L et a, b, ..., l étant quelconques, mais satisfaisant aux équations (3) on peut déterminer p, q, ... au moyen des équations (1).

Soient A, B, ..., L, p, q, ..., ϖ, χ, ... pris arbitrairement, et a, b, ..., l, α, β, ..., λ déterminés par (1) et (1 *bis*). Suivant l'hypothèse, on a

$$\Phi(a, \ldots, l) = \Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) \quad \text{et} \quad \Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = \Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L});$$

donc

$$\Phi(a, b, \ldots, l) = \Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \quad \ldots.$$

Donc on peut déterminer P, Q, ... par les équations (1 *ter*), ce qu'il fallait démontrer.

Démontrons maintenant la première partie, ou théorème direct. Par hypothèse, A, B, ..., L, p, q, ..., ϖ, χ, ... étant pris à volonté et a, b, ..., l, α, β, ..., λ déterminés au moyen de (1) et (1 *bis*), il en résulte les équations (1 *ter*).

Des équations (1) résulte le système (2); de même, de (1 *bis*) et de (1 *ter*) résultent :

$$(2\ bis) \quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0, \\ F_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$(2\ ter) \quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda; a, b, \ldots, l) = 0, \\ F_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda; a, b, \ldots, l) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Je dis que le système (2 *ter*) résulte de (2) et de (2 *bis*).

En effet, a, b, ..., l et α, β, ..., λ n'étant définis que par (1) et (1 *bis*), le système (2 *ter*) résulte de (1) et de (1 *bis*) par l'élimination de p, q, ..., ϖ, χ, ... et A, B, ..., L. Mais l'élimination de p, q, ... remplace le système (1) par le système (2), celle de ϖ, χ, ... remplace le système (1 *bis*) par (2 *bis*); donc (2 *ter*) résulte de l'élimination de A, B, ..., L entre (2) et (2 *bis*).

Le système (2), (2 *bis*) est formé par $2(n - m)$ équations, et cependant l'élimination de n lettres A, B, ..., L, au lieu de donner $(n - 2m)$ équations, en donne $(n - m)$, les équations (2 *ter*).

Si donc on élimine seulement $n-m$ lettres A, B, ..., G, les m autres, H, ..., L, disparaîtront d'elles-mêmes. Tirons A, B, ..., G des équations (2) et nous aurons

$$\begin{aligned} A &= \Psi\,(a, b, \ldots, l;\ H, \ldots, L), \\ B &= \Psi_1(a, b, \ldots, l;\ H, \ldots, L), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Tirons de même A, B, ..., G des équations (2 *bis*) et nous aurons

$$\begin{aligned} A &= \Psi\,(\alpha, \beta, \ldots, \lambda;\ H, \ldots, L), \\ B &= \Psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda;\ H, \ldots, L), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination est donc représenté par $n-m$ équations telles que

$$(4)\quad \begin{cases} \Psi\,(a, b, \ldots, l;\ H, \ldots, L) = \Psi\,(\alpha, \beta, \ldots, \lambda;\ H, \ldots, L), \\ \Psi_1(a, b, \ldots, l;\ H, \ldots, L) = \Psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda;\ H, \ldots, L), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

et l'on sait que H, ... L disparaissent, d'eux-mêmes, de ces équations.

En assignant donc à H, ..., L des valeurs numériques à volonté, on voit bien que les équations résultantes, équivalentes à (2 *ter*), ont la forme

$$\begin{aligned} \Phi\,(a, b, \ldots, l) &= \Phi\,(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \\ \Phi_1(a, b, \ldots, l) &= \Phi_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

6. Remarques. — Si les équations (4) sont rationnelles, la disparition de H, ..., L exige que Ψ ait la forme suivante :

$$\Psi = \Phi(a, b, \ldots, l)\Theta(H, \ldots, L) + \theta(H, \ldots, L),$$

et de même pour Ψ_1, ... Sous cette forme, on voit que Θ et θ disparaissent dans les équations (4), et l'invariant résultant est Φ.

Mais, si les équations (4) sont irrationnelles, la disparition de H, ..., L peut n'être pas immédiate. En assignant à H, ... L des valeurs numériques à volonté, comme on l'a dit dans la démonstration, c'est-à-dire en considérant H, ..., L comme des *constantes*

arbitraires, on voit les invariants se présenter avec des constantes arbitraires. Ceci ne doit pas étonner, puisqu'il s'agit ici d'invariants *absolus*, que l'on peut effectivement modifier en leur ajoutant des constantes arbitraires ou en les multipliant par des constantes arbitraires, sans troubler la propriété d'invariance.

L'analyse employée dans la démontration fournit un moyen régulier de former les invariants; ce moyen consiste à éliminer les paramètres dans les équations (1), puis à résoudre par rapport à $(n-m)$ quantités A, B, ..., G. Mais les substitutions formant groupe, on peut aussi résoudre par rapport à a, b, ..., g, en éliminant les paramètres.

Exemple :

$$a = \mathrm{A}p^2, \qquad b = \mathrm{A}pq + \mathrm{B}p, \qquad c = \mathrm{A}p^2 + 2\mathrm{B}q + \mathrm{C}.$$

En résolvant par rapport à c, c'est-à-dire en tirant p, q des deux premières, on obtient

$$c = \mathrm{A}\left(\frac{b-\mathrm{B}p}{\mathrm{A}p}\right)^2 + 2\mathrm{B}\frac{b-\mathrm{B}p}{\mathrm{A}p} + \mathrm{C} = \frac{b^2}{\mathrm{A}p^2} + \mathrm{C} - \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} = \frac{b^2}{a} + \mathrm{C} - \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}.$$

Voici l'invariant $\mathrm{C} - \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$.

En résolvant par rapport à b, on trouve

$$b = \sqrt{a}\sqrt{\frac{\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}}{\mathrm{A}} + c},$$

ce qui donne l'invariant $\frac{\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}}{\mathrm{A}} + c$, où c est une constante arbitraire.

III

SUR LES INVARIANTS D'HOMOLOGIE [1]

A. *En affirmant, dans notre lettre à M. Hermite [dont un extrait a paru dans les* Comptes rendus ([2])], *que les invariants différentiels de M. Halphen sont identiques avec nos réciprocants purs, nous sommes allés trop loin; nous aurions dû dire qu'ils sont identiques avec la classe spéciale de ces derniers que nous avons nommés « réciprocants projectifs »; en effet, en prenant pour « éléments »*

$$\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4},\quad \ldots,$$

regardés comme des quantités algébriques, que l'on pourra désigner (selon l'usage quand on parle de formes binaires) par $a, b, c, d, \ldots$, un invariant différentiel possède la propriété vraiment étonnante d'être en même temps un réciprocant et un sous-invariant ordinaire.

En posant

$$V = 4aa\frac{\partial f}{\partial b} + 5(ab + ba)\frac{\partial f}{\partial c} + 6(ac + bb + ca)\frac{\partial f}{\partial d} + \ldots,$$

$$\Omega = a\frac{\partial f}{\partial b} + 2b\frac{\partial f}{\partial c} + 3c\frac{\partial f}{\partial d} + \ldots,$$

un invariant différentiel I *satisfait en même temps aux deux équations aux dérivées partielles*

$$V(I) = 0, \qquad \Omega(I) = 0.$$

...*M. Halphen, à qui j'avais communiqué ce résultat, en a trouvé une toute autre démonstration qu'il m'autorise à communiquer à l'Académie. Elle*

([1]) Des deux extraits que nous réunissons sous ce titre, le premier (A) se trouve dans une Note de Sylvester *Sur les invariants différentiels*, présentée à l'Académie des Sciences dans sa séance du 4 janvier 1886 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CII, 1886, p. 31; *Œuvres de Sylvester*, t. IV, p. 521); il doit donc dater de décembre 1885; le second (B) est donné dans la vingt-cinquième leçon de Sylvester *Sur la théorie des réciprocants* (*American Journal of Mathematics*), t. IX, 1887, p. 297; *Œuvres de Sylvester*, t. IV, p. 445), et il y est indiqué que la lettre d'Halphen, d'où il provient, était du 14 juin 1886. Nous reproduisons, dans ce qu'elles ont d'essentiel, les explications données à leur sujet par Sylvester lui-même : elles sont imprimées ici en italiques. (*Note des éditeurs.*)

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CI, 1885, p. 1110; *Œuvres de Sylvester*, t. IV, p. 245. (*Note des éditeurs.*)

possède sur la mienne l'avantage d'aller plus au fond de la question, en faisant voir que l'équation $\Omega(\mathrm{I}) = 0$ *équivaut à dire que, en se servant de* x, y, z *au lieu de* $x, y, 1$, *un invariant différentiel peut subir le changement entre eux de* x *et* z. *Or puisque* $\mathrm{V}(\mathrm{I}) = 0$ *signifie qu'on peut imposer des substitutions linéaires quelconques sur* x *et* y, *il s'ensuit, en combinant les deux équations, que la même chose aura lieu quand* x, y, z *subissent tous les trois des substitutions linéaires quelconques. Voici la démonstration très élégante de M. Halphen :*

Si l'on fait le changement de variables

$$\mathrm{X} = \frac{1}{x}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{y}{x},$$

et qu'on écrive

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \qquad \ldots, \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}, \qquad \ldots,$$

on a

$$\mathrm{Y} = +x^{-1}y,$$
$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = -x^{+1}\left(y' - \frac{1}{x}y\right),$$
$$\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2} = +x^3y'',$$
$$\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^3} = -x^5\left(y''' + \frac{3}{x}y''\right),$$
$$\frac{d^4\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^4} = +x^7\left(y^{\mathrm{IV}} + \frac{8}{x}y''' + \frac{12}{x^2}y''\right),$$
$$\frac{d^5\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^5} = -x^9\left(y^{\mathrm{V}} + \frac{15}{x}y^{\mathrm{IV}} + \frac{60}{x^2}y''' + \frac{60}{x^3}y''\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^n\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^n} = (-1)^n x^{2n-1}\left[y^{(n)} + \frac{n(n-2)}{x}y^{(n-1)} + \frac{\alpha}{x^2}y^{(n-2)} + \frac{\beta}{x^3}y^{(n-3)} + \ldots\right].$$

Posant

$$\frac{d^n\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^n} = n!\,\mathrm{A}_n, \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = n!\,a_n, \qquad \frac{1}{x} = \varepsilon,$$

on a

$$\mathrm{A}_n = (-1)^n x^{2n-1}[a_n + (n-2)\varepsilon a_{n-1} + \alpha'\varepsilon^2 a_{n-2} + \ldots].$$

Soit une fonction $f(\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$ dont tous les termes soient de poids et de degré constants p, δ; en supposant ε infiniment petit,

on aura

$$f(A_0, A_1, \ldots, A_n) = (-1)^p x^{2p-\delta} \left\{ f(a_0, a_1, \ldots, a_n) + \varepsilon \left[-a_0 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3 \frac{\partial f}{\partial a_4} + \ldots + (n-2) a_{n-1} \frac{\partial f}{\partial a_n} \right] \right\}.$$

Donc, pour que f soit invariant pour la substitution considérée, il faut que l'on ait

$$a_2 \frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3 \frac{\partial f}{\partial a_4} + 3a_4 \frac{\partial f}{\partial a_5} + \ldots + (n-2) a_{n-1} \frac{\partial f}{\partial a_n} = a_0 \frac{\partial f}{\partial a_1}.$$

En particulier, si f ne contient pas a_1, ce qui est le cas des réciprocants *purs*, on aura

$$a_2 \frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3 \frac{\partial f}{\partial a_4} + \ldots + (n-2) a_{n-1} \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0.$$

(C. Q. F. D.)

Afin de compléter la théorie, il faut démontrer la réciproque.

... M. Halphen effectue cela en trouvant le développement complet de sa série et en faisant voir que, quand le coefficient de la première puissance de ε disparaît, la même chose aura lieu pour tous les coefficients suivants.

B. *Dans une lettre qu'il m'a écrite le 14 juin 1886, M. Halphen appelle* INVARIANTS D'HOMOLOGIE *les formes qui se conservent par la substitution* $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{x}$. *Il se sert des lettres*

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n$$

pour désigner y et ses dérivées successives prises par rapport à x (divisées par les factorielles qui correspondent aux indices); et supposant qu'elles deviennent

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_n$$

par suite de la substitution $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{x}$, *il donne, de la manière la plus rapide, deux démonstrations très ingénieuses de la formule*

$$A_n = (-1)^n x^{2n-1} \left\{ a_n + \frac{n-2}{1 \cdot x} a_{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot x^2} a_{n-2} + \ldots \right\};$$

d'où il déduit le théorème que la substitution en question change toute fonction homogène et isobarique f, de degré i et de poids ω (en $a_0, a_1, \ldots, a_n$), en

$$F = (-1)^{\omega} x^{2\omega - i} e^{\frac{\Theta}{x}} f,$$

où Θ est l'opérateur aux dérivées partielles

$$-a_0 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial a_3} + 2 a_3 \frac{\partial f}{\partial a_4} + \ldots + (n-2) a_{n-1} \frac{\partial f}{\partial a_n}.$$

Je donne les deux démonstrations dans les termes mêmes de M. Halphen, en faisant seulement de légers changements dans le libellé des formules là où cela m'a paru utile.

Soient

$$X = \frac{1}{x}, \qquad Y = \frac{y}{x}.$$

Par une formule connue (Schlömilch, *Compendium*, II)

$$\frac{d^n y}{dX^n} = (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} y),$$

et puisque $Y = Xy$, il en résulte

$$\frac{d^n Y}{dX^n} = X \frac{d^n y}{dX^n} + n \frac{d^{n-1} y}{dX^{n-1}} = (-1)^n x^n \left\{ \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} y) - n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{n-2} y) \right\}.$$

Si l'on pose

$$\frac{d^n Y}{dX^n} = n! A_n, \qquad y^{(n)} = n! a_n,$$

il vient

$$\text{(I)} \quad A_n = (-1)^n x^{2n-1} \left\{ a_n + \frac{n-2}{1.x} a_{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2.x^2} a_{n-2} + \ldots \right\}.$$

Soit

$$\Theta f = \Sigma (n-2) a_{n-1} \frac{\partial f}{\partial a_n};$$

on aura

$$\Theta\, a_n = (n-2) a_{n-1},$$
$$\Theta^2 a_n = (n-2)(n-3) a_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = (-1)^n x^{2n-1} \left\{ a_n + \frac{1}{1.x} \Theta a_n + \frac{1}{1.2.x^2} \Theta^2 a_n + \ldots \right\}.$$

Par conséquent, pour une fonction contenant $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots,$

de degré i et de poids ω à chaque terme, on aura

$$F = (-1)^{\omega} x^{2\omega - i} \left\{ f + \frac{1}{1.x} \Theta f + \frac{1}{1.2.x^2} \Theta^2 f + \ldots \right\}.$$

(C. Q. F. D.)

Autre démonstration de la formule (1).

Si l'on change X et x en $X + H$ et $x + h$, on a

$$h = -\frac{H}{X(X+H)}.$$

Maintenant la formule

$$y = a_0 + h a_1 + h^2 a_2 + \ldots + h^n a_n + \ldots,$$

écrite *symboliquement*

$$y = \frac{1}{1 - ah},$$

devient

$$y = \frac{X(X+H)}{X^2 + H(X+a)}.$$

D'ailleurs

$$Y = (X+H) y;$$

donc *symboliquement*

(II) $$Y = \frac{X(X+H)^2}{X^2 + H(X+a)}.$$

Si l'on développe le second membre de (II) suivant les puissances ascendantes de H, le coefficient de H^n est A_n. Or ce développement est

$$Y = X\left[1 + \left(1 - \frac{a}{X}\right)\frac{H}{X} + \left(\frac{a}{X}\right)^2\left(\frac{H}{X}\right)^2 + \ldots + (-1)^n \left(\frac{H}{X}\right)^n \left(1 + \frac{a}{X}\right)^{n-2} \left(\frac{a}{X}\right)^2 + \ldots\right];$$

donc *symboliquement*

$$A_n = (-1)^n \frac{1}{X^{n+1}} \left(1 + \frac{a}{X}\right)^{n-2} a^2 = (-1)^n x^{2n-1} \left(a + \frac{1}{x}\right)^{n-2} a^2,$$

ce qui est justement la formule (I).